

定数係数線型連立微分方程式・差分方程式の

解の一般型 —経済数学講義への補論—

小 山 昭 雄

1 は し が き

経済学において、とりわけ経済動学の理論に於て、微分方程式、差分方程式の果たす役割は極めて大きい。経営科学の分野でも、待ち行列をはじめとして、さまざまな領域でこの理論は重要な道具となっている。ただ、社会科学で使用される微分方程式、差分方程式は定数係数線型という、限られたタイプのものをもっとも多い。このタイプのものは、数学的に、その解の構造がはっきりわかっていることと、応用面で多く現れる問題は、このタイプのものではほとんど間に合う、という事情によるのである。

定数係数線型連立微分方程式、差分方程式の理論は、行列の理論、とりわけ固有値、固有ベクトルの理論と深い係り合いをもつ。経済数学の講義で固有値、固有ベクトルに関する内容はかなり詳しく説明しているし、差分方程式の話もしている。しかし、両者を結びつけた一般論まで述べるには時間が不足しているし、また、理論の構造もかなり複雑になるので、そこまで述べるのは無理かもしれない。そこで、より進んだ議論に興味をもたれる学生諸君のために、経済数学の講義の知識をもとにすれば理解できるように、講義の補足として、ここで一般論を展開しておきたいと思う。これが、本論文の第1の意図である。

この論文の意図はもう1つある。定数係数線型差分方程式の解の一般型を厳密な形で与

える議論は、筆者の見聞した限りでは、巷間に見られる教科書には、内外を問わず、まったく見当らない。実際的な簡便法とでもいうべき方法はほとんどの教科書にあるが、それ以上に出ない。これは、厳密な理論が行列のジョルダン標準形の理論を必要とし、ジョルダンの標準形を導く論理がかなり面倒であることと、実際問題を取り扱うときは、簡便法で十分間に合う、ということによるのであろう。

微分方程式に関しては、有名なポントリヤーギンの教科書に見事な解説がある。しかし、そこで述べられた論理は、理解するのに少々骨が折れる。そこで、その論理を咬みくだいて述べた上で、結論を差分方程式に適用することを試みてみたい。これがもう1つの意図である。

内容的には、行列のジョルダン標準形を導く過程にかなり紙数を費すことになるが、ジョルダンの標準形自身も、線型経済学の進んだ理論を理解するには必要な知識であり、ここで述べる説明は、巷間の数学の教科書にかかっているものよりも、ずっと明快になっているはずである。

2 ジョルダンの標準形

正方行列 A をジョルダンの標準形にすることは、ときに変便利ながことがある。 A^n の $n \rightarrow \infty$ のときの状態を調べる場合はその一例であるが、定数係数線型微分方程式、差分方程式の解の一般形を導く際にも、この形は必要

となる。しかし、その形を導く過程は、あまり容易ではない。まず、固有値、固有ベクトルに関する理論を整理することから始める。

2.1 固有値

n 次正方行列 A に対して

$$Ax = \lambda x, x \neq 0 \quad (2.1)$$

をみたす数 λ とベクトル x を求める。この関係式は

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad (2.2)$$

とかくことができる。ここで I は n 次単位行列である。この関係式をみたす $x \neq 0$ が存在するための必要かつ十分な条件は、 λ が

$$|\lambda I - A| = 0$$

をみたすことである。ここで $|\lambda I - A|$ は行列 $\lambda I - A$ の行列式である。 t の n 次多項式

$$f_A(t) = |tI - A|$$

を A の固有多項式といい、 $f_A(t) = 0$ を固有方程式という。固有方程式の n 個の根を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とする。これが A の固有値である。固有値 λ に対して、(2.1)あるいは(2.2)をみたすベクトル $x \neq 0$ を、 λ に対応する固有ベクトルという。

固有値、固有ベクトルに関する主要な性質のうちで、基本的なものは経済数学の講義の中で説明しているが、ここでは、以下の議論に必要となる諸性質を定理の形でまとめておくことにする。

定理2.1 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ が A の相異なる固有値であれば、対応する固有ベクトル x_1, x_2, \dots, x_k は1次独立である。

証明

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0 \quad (2.3)$$

とおく。(2.3)式の両辺に λ_k をかけると

$$\alpha_1 \lambda_k x_1 + \alpha_2 \lambda_k x_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k x_k = 0 \quad (2.4)$$

一方、(2.3)の両辺に左から A をかけ、 $Ax_j = \lambda_j x_j$ という関係を使うと

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k x_k = 0 \quad (2.5)$$

(2.5)から(2.4)を引くと、 $\alpha_k \lambda_k x_k$ の項が消えて

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) x_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_k) x_2 + \dots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) x_{k-1} = 0 \quad (2.6)$$

がえられる。ふたたび(2.6)式の両辺に λ_{k-1} をかけたものと、(2.6)式に左から A をかけて $Ax_j = \lambda_j x_j$ を使ってかきなおした式の差をとれば、 x_{k-2} の項が消えて

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k-1}) (\lambda_1 - \lambda_k) x_1 + \dots + \alpha_{k-2} (\lambda_{k-2} - \lambda_{k-1}) (\lambda_{k-2} - \lambda_k) x_{k-2} = 0$$

がえられる。以下同様に進めて、結局

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_3) \dots (\lambda_1 - \lambda_k) x_1 = 0$$

がえられるが、ここで $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ がすべて相異なること、および、 $x_1 \neq 0$ であることを考慮すると、 $\alpha_1 = 0$ でなくてはならない。同様にして $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_k = 0$ がえられるから、 x_1, x_2, \dots, x_k は1次独立である。(証明終)

定理2.2 P を任意の n 次正方行列としたとき、行列 AP と PA は同じ固有多項式をもつ。したがって当然、固有値も同じである。

証明。 P がゼロ行列であれば AP も PA も共にゼロ行列となるから、定理の主張は当然成立する。そこで、 P はゼロ行列ではない場合を考える。まず、 P が正則(すなわち $|P| \neq 0$)のときは P の逆行列 P^{-1} があるから $tI - AP = (tP^{-1} - A)P$ とかくことができしたがって行列 AP の固有多項式は

$$f_{AP}(t) = |tI - AP| = |(tP^{-1} - A)P| = |tP^{-1} - A| |P| \text{ とかける。同様にして } PA \text{ の固有多項式は}$$

$$f_{PA}(t) = |tI - PA| = |P(tP^{-1} - A)| = |P| |tP^{-1} - A| \text{ となる。この両式の右辺は同じものだから、左辺も同じである。よって } f_{AP}(t) = f_{PA}(t) \text{ である。}$$

P が正則でないときは P は逆行列をもたないから上述の論法は使えないが、この場合は絶対値が十分小さいすべての $\varepsilon \neq 0$ に対して $\varepsilon I + P$ は正則になる。なぜなら、 $|tI + P| = 0$ となるのは t が $-P$ の固有値の場合に限るから、 $-P$ の固有値のうちで、0を除いて絶対値の最小のものを α とすれば、 $0 < |\varepsilon| < |\alpha|$ となるようなどんな ε に対しても、 $|\varepsilon I + P| \neq 0$ とはなりえないからである。このようにえらばれた ε に対して $\varepsilon I + P$ に上

述の結果を適用すると

$$f_A(\varepsilon I + p)(t) = f(\varepsilon I + p)_A(t)$$

がえられるが、固有多項式の係数は行列の要素の連続関数であることに注意して $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば、 $f_{AP}(t) = f_{PA}(t)$ がえられる。(証明終)

系 P が正則であれば $f_{P^{-1}AP}(t) = f_A(t)$

証明、定理 2 の結論のところで A を $P^{-1}A$ でおきかえればよい。(証明終)

一般に、 t の m 次多項式

$$g(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_{m-1} t + a_m$$

に対して、 t のところへ n 次正平方行列 A を代入してえられる行列を $g(A)$ とかく。ただし、定数 a_m のところは $a_m I$ としておく。すなわち

$$g(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_{m-1} A + a_m I$$

これに対して、次の定理が成り立つ。

定理 2・3 (Frobenius の定理) (註) A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすれば、 $g(A)$ の固有値は $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \dots, g(\lambda_n)$ である。

(註) Frobenius の名を冠してある定理はいくつもある。産業連関論で重要な非負行列に関して、経済学者の間で著名な Frobenius の定理は、ここで述べるものとは異なる。

証明 $g(\lambda_j)$ が $g(A)$ の固有値であることはすぐわかる。 λ_j に対応する固有ベクトルを x_j とすれば

$$Ax_j = \lambda_j x_j, A^2 x_j = \lambda_j A x_j = \lambda_j^2 x_j, \dots, A^n x_j = \lambda_j^n x_j \text{ であるから,}$$

$$(a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_{m-1} A + a_m I) x_j \\ = (a_0 \lambda_j^m + a_1 \lambda_j^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda_j + a_m) x_j$$

がえられる。すなわち

$$g(A) x_j = g(\lambda_j) x_j, x_j \neq 0$$

が成り立つ。これは、 $g(\lambda_j)$ が行列 $g(A)$ の固有値であり、対応する固有ベクトルが x_j であることを示している。

しかし、 $g(A)$ の固有値が $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \dots, g(\lambda_n)$ のみであることを示さなくてはならない。そのためには、次のようにすればよい。まず

$$f_A(t) = |tI - A| = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \dots (t - \lambda_n) \text{ である。一方、} g(t) = 0 \text{ の根を } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \text{ とすると}$$

$$g(t) = a_0(t - \alpha_1)(t - \alpha_2) \dots (t - \alpha_m)$$

であるから、ここで t のところへ A を代入して

$$g(A) = a_0(A - \alpha_1 I)(A - \alpha_2 I) \dots (A - \alpha_m I)$$

がえられる。両辺の行列式をとると

$$|g(A)| = a_0^n |A - \alpha_1 I| |A - \alpha_2 I| \dots |A - \alpha_m I| \\ = (-1)^{mn} a_0^n |\alpha_1 I - A| |\alpha_2 I - A| \dots |\alpha_m I - A|$$

ところで

$$|\alpha_i I - A| = f_A(\alpha_i) = (\alpha_i - \lambda_1)(\alpha_i - \lambda_2) \dots (\alpha_i - \lambda_n)$$

であるから、これを上式に代入すると

$$|g(A)| = (-1)^{mn} a_0^n [(\alpha_1 - \lambda_1)(\alpha_1 - \lambda_2) \dots (\alpha_1 - \lambda_n)] [(\alpha_2 - \lambda_1)(\alpha_2 - \lambda_2) \dots (\alpha_2 - \lambda_n)] \dots [(\alpha_m - \lambda_1)(\alpha_m - \lambda_2) \dots (\alpha_m - \lambda_n)]$$

ここで右辺を λ についてまとめなおせば

$$[a_0(\lambda_1 - \alpha_1)(\lambda_1 - \alpha_2) \dots (\lambda_1 - \alpha_m)] \dots [a_0(\lambda_n - \alpha_1)(\lambda_n - \alpha_2) \dots (\lambda_n - \alpha_m)] = g(\lambda_1)g(\lambda_2) \dots g(\lambda_n)$$

がえられる。 $g(t)$ は t に関する任意の多項式でよいから、任意の s に対して $h(t) = s - g(t)$ とおいて、多項式 $h(t)$ に対して上述の結論を適用すると

$$|h(A)| = h(\lambda_1)h(\lambda_2) \dots h(\lambda_n)$$

となるが、ここで $|h(A)| = |sI - g(A)|$ 、 $h(\lambda_j) = s - g(\lambda_j)$ であるから

$$|sI - g(A)| = (s - g(\lambda_1))(s - g(\lambda_2)) \dots (s - g(\lambda_n))$$

がえられる。左辺は $g(A)$ の固有多項式 $f_{g(A)}(s)$ に他ならない。よって $g(A)$ の固有値は $g(\lambda_1), g(\lambda_2), g(\lambda_n)$ のみである。

定理 2・4 (Hamilton - Cayley の定理) A の固有多項式を $f_A(t)$ とすると

$$f_A(A) = 0$$

である。ここで右辺の 0 はゼロ行列である。

証明 e_j を、第 j 成分が 1 で、その他の成分がゼロである単位ベクトルとする。 A の第 j 列を a_j とし、 (i, j) 要素を a_{ij} とすれば

$$Ae_j = a_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{nj}e_n = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$$

とかける。また、 δ_{ij} を、 $i=j$ ならば 1 、 $i \neq j$

ならば0をあらわす記号(Kronecker のデル

タとよばれている)とすれば $Ae_j = \sum_{i=1}^n \delta_{ij} Ae_i$

とかけるから

$$\sum_{i=1}^n \delta_{ij} Ae_i = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$$

となる。よって、移項して

$$\sum_{i=1}^n (\delta_{ij} A - a_{ij} I) e_i = 0 \quad (2 \cdot 7)$$

がえられる。いま、行列

$$tI - A = \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t - a_{nn} \end{pmatrix} = (\delta_{ij} t - a_{ij})$$

の余因数行列を $B(t) = (b_{ij}(t))$ とすれば

$$(tI - A)B(t) = \begin{pmatrix} |tI - A| & |tI - A| & 0 \\ 0 & |tI - A| & \\ & & |tI - A| \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} f_A(t) & f_A(t) & 0 \\ 0 & f_A(t) & \\ & & f_A(t) \end{pmatrix}$$

両辺の (i, j) 要素を比較すると

$$\sum_{k=1}^n b_{kj}(t)(\delta_{ikt} - a_{ik}) = \delta_{ij} f_A(t)$$

これは t について恒等的な関係式だから、 t を A で置きかえた式も成立する。よって

$$\sum_{k=1}^n b_{kj}(A)(\delta_{ik}A - a_{ik}I) = \delta_{ij} f_A(A)$$

両辺に右から e_i をかけて i について加えると

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{kj}(A)(\delta_{ik}A - a_{ik}I)e_i = \sum_{i=1}^n \delta_{ij} f_A(A)e_i$$

となるが

$$\text{左辺} = \sum_{k=1}^n b_{kj}(A) \left[\sum_{i=1}^n (\delta_{ik}A - a_{ik}I)e_i \right]$$

(2・7)により

$$= \sum_{k=1}^n b_{kj}(A) \cdot 0 = 0$$

右辺 $= f_A(A)e_j$

であるから

$$f_A(A)e_j = 0$$

となる。これは $f_A(A)$ の第 j 列がゼロ・ベクトルであることを示す。 j は任意であったから、 $f_A(A) = 0$ である。(証明終)

2・2 最小多項式

一般に、多項式 $f(t)$ で、 $f(A) = 0$ (ゼロ行列) となるものがあれば、 $f(t)$ を A の零化多項式という。Hamilton-Cayley の定理により、 A の固有多項式 $f_A(t)$ は A の零化多項式であるから、どんな正方行列 A に対しても、その零化多項式は必ず存在する。

A の零化多項式のうちで次数が最小であり、かつ、最高次の項の係数が1であるものを、 A の最小多項式とよび、それを $\varphi_A(t)$ であらわす。最小多項式に関して、次の定理が成立する。

定理 2・5 A の任意の零化多項式 $f(t)$ は最小多項式 $\varphi_A(t)$ で割り切れる。 A が実数行列なら、 $\varphi_A(t)$ も実係数の多項式である。

証明 最小多項式の定義から、 $\varphi_A(t)$ の次数は $f(t)$ の次数よりも大きくはない。 $f(t)$ を $\varphi_A(t)$ で割った商を $g(t)$ 、余りを $r(t)$ とすると

$$f(t) = g(t)\varphi_A(t) + r(t)$$

となるから

$$f(A) = g(A)\varphi_A(A) + r(A)$$

ところで $f(A) = \varphi_A(A) = 0$ であるから $r(A) = 0$ となり、 $r(t)$ も A の零化多項式となるが、 $r(t)$ の次数は $\varphi_A(t)$ の次数よりも小さいことから、 $\varphi_A(t)$ が次数最小の零化多項式であることから、 $r(t) \equiv 0$ でなくてはならない。よって $f(t)$ は $\varphi_A(t)$ で割り切れる。次に

$$\varphi_A(t) = t^m + b_1 t^{m-1} + \cdots + b_{m-1} t + b_m$$

としたとき

$$\varphi_A(A) = A^m + b_1 A^{m-1} + \cdots + b_{m-1} A + b_m I \\ = 0$$

であるから、 A が実数行列であれば、 $\varphi_A(A)$ の共役複素行列を $\overline{\varphi_A(A)}$ としたとき

$$\overline{\varphi_A(A)} = A^m + \overline{b_1} A^{m-1} + \cdots + \overline{b_{m-1}} A + \overline{b_m} I = 0$$

となる。よって、 b_i を $\overline{b_i}$ の共役複素数として

$$\overline{\varphi_A(t)} = t^m + \overline{b_1}t^{m-1} + \cdots + \overline{b_{m-1}}t + \overline{b_m}$$

も A の零化多項式となる。したがって $\overline{\varphi_A(t)}$ は $\varphi_A(t)$ で割り切れるが、 $\varphi_A(t)$ と $\overline{\varphi_A(t)}$ は最高次の係数は共に 1 であるから、そして共に t の m 次式であるから、 $\varphi_A(t) \equiv \overline{\varphi_A(t)}$ でなくてはならない。よって $\varphi_A(t)$ は実係数の多項式である。

定理 2・6 λ が A の固有値であるための必要十分条件は λ が $\varphi_A(t)=0$ の根となることである。

証明 A の固有値を λ 、対応する固有ベクトルを x とすれば、Frobenius の定理の証明のところで述べたのと同様な論法により、 $\varphi_A(A)x = \varphi_A(\lambda)x$ が成立する。ところが $\varphi_A(A) = 0$ であるから、 $\varphi_A(\lambda)x = 0$ となり、 $x \neq 0$ であるから $\varphi_A(\lambda) = 0$ でなくてはならない。よって λ は $\varphi_A(t)=0$ の根である。

逆は次のようにしてわかる。Hamilton-Cayley の定理により A の固有多項式 $f_A(t)$ は A の零化多項式であるから、定理 5 により $f_A(t)$ は $\varphi_A(t)$ で割り切れる。よって $f_A(t) = \varphi_A(t)g(t)$ とかけるから、 $\varphi_A(t)=0$ の根は $f_A(t)=0$ の根になる。したがって、 λ が $\varphi_A(t)=0$ の根であれば、 λ は $f_A(t)=0$ の根であり、 A の固有値である。(証明終)

定理 2・7 A の最小多項式 $\varphi_A(t)$ が

$\varphi_A(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$ 、 $\varphi_1(t)$ と $\varphi_2(t)$ は互に素と因数分解されるものとする。 n 次元ベクトルの全体 (n 次元空間) を R^n とし

$$\varphi_1(A)x = 0 \text{ となる } x \text{ の全体を } R_1$$

$$\varphi_2(A)x = 0 \text{ となる } x \text{ の全体を } R_2$$

とすれば、 R^n は R_1 と R_2 の直和^(註)に一意的に分解される。すなわち

$$R^n = R_1 + R_2$$

(註) $x \in R^n$ が $x = x_1 + x_2$ 、 $x_1 \in R_1$ 、 $x_2 \in R_2$ とかけ、 $R_1 \cap R_2 = 0$ のとき R^n は R_1 と R_2 の直和に分解される、という。このとき $R^n = R_1 + R_2$ とかく。

証明 $\varphi_1(t)$ と $\varphi_2(t)$ は互に素、すなわち最大公約数が 1、であるから、適当な多項式

$p_1(t)$ 、 $p_2(t)$ に対して

$$1 = p_1(t)\varphi_1(t) + p_2(t)\varphi_2(t)$$

が恒等的に成立する^(註)。これは恒等式だから、 t のところへ行列 A を入れた関係式

$$I = p_1(A)\varphi_1(A) + p_2(A)\varphi_2(A)$$

も成立する。 $x \in R^n$ を任意にえらび、この x を上式の両辺に右からかけると

$$x = p_1(A)\varphi_1(A)x + p_2(A)\varphi_2(A)x$$

がえられる。そこで

$$x_1 = p_2(A)\varphi_2(A)x, \quad x_2 = p_1(A)\varphi_1(A)x$$

とおくと

$$x = x_1 + x_2$$

であって、しかも $\varphi_A(A) = 0$ であるから

$$\begin{aligned} \varphi_1(A)x_1 &= \varphi_1(A)p_2(A)\varphi_2(A)x = p_2(A)\varphi_1(A)\varphi_2(A)x = p_2(A)\varphi_A(A)x = 0 \\ (A)\varphi_2(A)x &= p_2(A)\varphi_A(A)x = 0 \end{aligned}$$

よって $x_1 \in R_1$ である。同様に $\varphi_2(A)x_2 = 0$ から $x_2 \in R_2$ である。

(註) φ_1 の次数 $\geq \varphi_2$ の次数、とする。 φ_2 を φ_1

で割った商を q_1 、余りを r_1 をすると $\varphi_2 = \varphi_1q_1 + r_1$ 、ここで r_1 の次数は φ_1 の次数より小さい。次に φ_2 を r_1 で割り、商を q_2 、余りを r_2 とすると $\varphi_2 = r_1q_2 + r_2$ で、 r_2 の次数は r_1 の次数より小さい。同様に進めば、 φ_1 と φ_2 は互に素だから、何回目かで余り 1 がになる。たとえば 3 回目で余りが 1 になったとすれば

$$\varphi_2 = \varphi_1q_1 + r_1, \quad \varphi_2 = r_1q_2 + r_2, \quad \varphi_2 = r_2q_3 + 1$$

となる。真中の式に q_3 をかけて最後の式の r_2q_3 を消去すると $\varphi_2(1 - q_2) + r_1q_2q_3 = 1$ がえられるから、最初の式に q_2q_3 をかけて、いま得た式から $r_1q_2q_3$ を消去すると $\varphi_2(1 - q_2 + q_2q_3) - \varphi_1q_1q_2q_3 = 1$ となる。そこで $p_1 = -q_1q_2q_3$ 、 $p_2 = 1 - q_2 + q_2q_3$ とおけば $p_1\varphi_1 + p_2\varphi_2 = 1$ がえられる。 k 回目で余りが 1 となる場合も、同様である。

分解の一意性を証明するために、同じ x がさらに $x = y_1 + y_2$ 、 $y_1 \in R_1$ 、 $y_2 \in R_2$ とかけたとすれば

$$\begin{aligned} y_1 &= p_1(A)\varphi_1(A)y_1 + p_2(A)\varphi_2(A)y_1 = 0 + p_2(A)\varphi_2(A)y_1 = p_2(A)\varphi_2(A)y_2 + p_2(A)\varphi_2(A)y_1 = p_2(A)\varphi_2(A)(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

$$=p_2(A)\varphi_2(A)x=x_1$$

である。同様に $y_2=x_2$ である。よって x の x_1, x_2 への分解は一意的である。

最後に、 $R_1 \cap R_2 = 0$ であることは、次のようにしてわかる。 $x_0 \in R_1 \cap R_2$ とすれば、 $x_0 \in R_1$ かつ $x_0 \in R_2$ であるから $\varphi_1(A)x_0=0$, $\varphi_2(A)x_0=0$ が共に成立する。よって、 $x_0=p_1(A)\varphi_1(A)x_0+p_2(A)\varphi_2(A)x_0=0+0=0$, すなわち $x_0=0$ でなくてはならない。(証明終)

この定理の論法を繰り返すことにより、次の系がえられる。

系 $\varphi_A(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t)\cdots\varphi_k(t)$, ここで各 $\varphi_i(t)$ はどの 2 つも互に素と、因数分解されるならば、 R^n の任意の x は

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_k$$

と一意的に分解される。ここで各 x_j , $j=1, 2, \dots, k$, は、 $\varphi_j(A)x_j=0$ となるベクトルである。したがって、いま $\varphi_j(A)x_j=0$ となる x_j の全体を R_j とすれば、 R^n は

$$R^n=R_1+R_2+\cdots+R_k$$

と直和分解される。

さて、行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ とし、これらが固有方程式 $f_A(t)=0$ の、それぞれ m_1, m_2, \dots, m_k 重根であるとする

$$f_A(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_k)^{m_k}$$

と因数分解される。一方、定理 2.6 によれば $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ は $\varphi_A(t)=0$ の根であり、しかも $\varphi_A(t)$ は $f_A(t)$ の因数であるから

$$\varphi_A(t)=(t-\lambda_1)^{l_1}(t-\lambda_2)^{l_2}\cdots(t-\lambda_k)^{l_k}$$

と因数分解され、しかも

$$m_1 \geq l_1, m_2 \geq l_2, \dots, m_k \geq l_k$$

でなくてはならない。

$\varphi_A(t)$ の各因数 $(t-\lambda_j)^{l_j}$, $j=1, 2, \dots, k$, は互に素であるから、定理 2.7 の系により、 R^n の任意のベクトル x は

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_k$$

$$(A-\lambda_j I)^{l_j}x_j=0, \quad j=1, 2, \dots, k$$

と一意的に分解されることになる。そこで

$R_j=\{x_j | (A-\lambda_j I)^{l_j}x_j=0\}$ $j=1, 2, \dots, k$ とおくと(註), R^n は R_1, R_2, \dots, R_k の直和に

一意的に分解されることになる。このとき次の定理が成立する。

(註) $\{x_j | (A-\lambda_j I)^{l_j}x_j=0\}$ は、 $(A-\lambda_j I)^{l_j}x_j=0$ となるすべての x_j の集合、という意味である。

定理 2.8 各 R_j はベクトル空間であり、その次元は固有値 λ_j の重複度 m_j に等しい。

証明 $(A-\lambda_j I)^{l_j}x=0$ ならば任意のスカラー α に対して $(A-\lambda_j I)^{l_j}\alpha x=0$ であるから、 $x \in R_j$ ならば $\alpha x \in R_j$ である。また、 $(A-\lambda_j I)^{l_j}x=0$, $(A-\lambda_j I)^{l_j}y=0$ ならば $(A-\lambda_j I)^{l_j}(x+y)=0$ であるから、 $x, y \in R_j$ ならば $x+y \in R_j$ である。よって R_j はベクトル空間である。

さらに

$$x \in R_j \text{ ならば } Ax \in R_j$$

である。なぜなら、 $x \in R_j$ なら $(A-\lambda_j I)^{l_j}x=0$ であるが、このとき $(A-\lambda_j I)^{l_j}(Ax)=A(A-\lambda_j I)^{l_j}x=A \cdot 0=0$ となるからである。さて、 R_j の次元を n_j とし、 R_j の基底を構成するベクトルを

$$p_1^{(j)}, p_2^{(j)}, \dots, p_{n_j}^{(j)}$$

とする。 $x_j \in R_j$ をこの基底の 1 次結合として $x_j=u_1^{(j)}p_1^{(j)}+u_2^{(j)}p_2^{(j)}+\cdots+u_{n_j}^{(j)}p_{n_j}^{(j)}$

(2.8)

とあらわす。上に述べたことから、 $A p_1^{(j)}, A p_2^{(j)}, \dots, A p_{n_j}^{(j)}$ はいずれも R_j に属するから、これらを基底の 1 次結合としてあらわしたものを

$$A p_1^{(j)}=b_{11}^{(j)}p_1^{(j)}+b_{21}^{(j)}p_2^{(j)}+\cdots+b_{n_j1}^{(j)}p_{n_j}^{(j)}$$

$$A p_2^{(j)}=b_{12}^{(j)}p_1^{(j)}+b_{22}^{(j)}p_2^{(j)}+\cdots+b_{n_j2}^{(j)}p_{n_j}^{(j)}$$

(2.9)

.....

.....

$$A p_{n_j}^{(j)}=b_{1n_j}^{(j)}p_1^{(j)}+b_{2n_j}^{(j)}p_2^{(j)}+\cdots+b_{n_jn_j}^{(j)}p_{n_j}^{(j)}$$

とし、 $n \times n_j$ 行列 P_j , $n_j \times n_j$ 行列 B_i を

$$P_j=(p_1^{(j)}, p_2^{(j)}, \dots, p_{n_j}^{(j)}), \quad B_j=$$

$$\begin{pmatrix} b_{11}^{(j)} & b_{12}^{(j)} & \cdots & b_{1n_j}^{(j)} \\ b_{21}^{(j)} & b_{22}^{(j)} & \cdots & b_{2n_j}^{(j)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n_j1}^{(j)} & b_{n_j2}^{(j)} & \cdots & b_{n_jn_j}^{(j)} \end{pmatrix}$$

で定義すると、(2・9)の関係は

$$AP_j = P_j B_j$$

とかくことができる。したがって(2・8)に A をかけると

$$\begin{aligned} Ax_j &= u_1^{(j)} Ap_1^{(j)} + u_2^{(j)} Ap_2^{(j)} + \cdots + u_{n_j}^{(j)} Ap_{n_j}^{(j)} \\ &= (Ap_1^{(j)}, Ap_2^{(j)}, \dots, Ap_{n_j}^{(j)}) \begin{pmatrix} u_1^{(j)} \\ u_2^{(j)} \\ \vdots \\ u_{n_j}^{(j)} \end{pmatrix} \\ &= AP_j u_j = P_j B_j u_j \end{aligned} \quad (2 \cdot 10)$$

となる。ここで u_j は $u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \dots, u_{n_j}^{(j)}$ を成分とする n_j 次元列ベクトルである。

さて、任意の $x \in R^n$ は

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k, \quad x_j \in R_j, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

とかけるから、(2・10)の関係を使うと

$$\begin{aligned} Ax &= Ax_1 + Ax_2 + \cdots + Ax_k \\ &= P_1 B_1 u_1 + P_2 B_2 u_2 + \cdots + P_k B_k u_k \end{aligned} \quad (2 \cdot 10)$$

とかける。ここで

$$P = (P_1 P_2 \cdots P_k), \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & B_2 & \\ 0 & & B_k \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$$

とおくと、(2・11)の関係は

$$Ax = PBu \quad (2 \cdot 12)$$

とかくことができる。一方(2・8)式は $x_j = P_j u_j$ とかけるから

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + \cdots + x_k \\ &= P_1 u_1 + P_2 u_2 + \cdots + P_k u_k \\ &= Pu \end{aligned} \quad (2 \cdot 13)$$

となる。(2・12)と(2・13)から $APu = PBu$ であり、さらに、 P は $n \times n$ の正方行列で、各列ベクトルは1次独立であるから、 P は正則行列であり、したがって逆行列がある。よって

$$P^{-1}APu = Bu$$

という関係がえられる。ところで $u = P^{-1}x$ で x は R^n の任意のベクトルであったから、 u も

任意のベクトルをとることができる。したがって、 u として n 個の単位ベクトルをとればすぐわかるように

$$P^{-1}AP = B$$

でなくてはならない。ところで定理2系により、 A と $P^{-1}AP = B$ は同じ固有多項式をもつ。

このことと、行列 B の形から、 B の固有多項式は B_1, B_2, \dots, B_k の固有多項式の積となることはすぐわかるから

$$f_A(t) = f_B(t) = f_{B_1}(t) f_{B_2}(t) \cdots f_{B_k}(t) \quad (2 \cdot 14)$$

がえられる。 $AP = PB$ から $A = PBP^{-1}$ となることを考慮すると

$$\begin{aligned} (A - \lambda_j I)^{i_j} &= (PBP^{-1} - \lambda_j PIP^{-1})^{i_j} \\ &= [P(B - \lambda_j I)P^{-1}]^{i_j} \\ &= P(B - \lambda_j I)^{i_j}P^{-1} \end{aligned}$$

となるが、ここで両辺に R_j の基底ベクトル $p_i^{(j)}$ を右からかけると、 R_j の定義から

$$0 = (A - \lambda_j I)^{i_j} p_i^{(j)} = P(B - \lambda_j I)^{i_j} P^{-1} p_i^{(j)}$$

となる。ところで、右辺の $P^{-1} p_i^{(j)}$ は、 P の定義から、 P のなかで $p_j^{(j)}$ が位置する列の番号と同じ番号をもつ成分が1で、その他の成分がゼロである単位ベクトルとなるから、それを $e_i^{(j)}$ とかくと

$$P(B - \lambda_j I)^{i_j} e_i^{(j)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n_j$$

となり、両辺に左から P^{-1} をかけると

$$(B - \lambda_j I)^{i_j} e_i^{(j)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n_j$$

がえられる。これは、行列

$$(B - \lambda_j I)^{i_j} = \begin{pmatrix} (B_1 - \lambda_j I_1)^{i_j} & & 0 \\ & (B_2 - \lambda_j I_2)^{i_j} & \\ 0 & & (B_j - \lambda_j I_j)^{i_j} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (B_k - \lambda_j I_k)^{i_j} \end{pmatrix}$$

の $(B_j - \lambda_j I_j)^{i_j}$ の部分がゼロ行列であることを意味するから、したがって多項式 $(t - \lambda_j)^{i_j}$ は B_j の零化多項式になる。しかも、この零化多項式は唯1つの根 λ_j をもつだけであるから、定理2・6により B_j の固有値は λ_j だけである。 B_j は $n_j \times n_j$ の大きさをもつから、 B_j の固有多項式の次数は n_j である。よって

$$f_{B_j}(t) = |tI_j - B_j| = (t - \lambda_j)^{n_j}$$

である。これと(2・13)の関係から

$$f_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2}\dots(t-\lambda_k)^{n_k}$$

がえられる。一方

$$f_A(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\dots(t-\lambda_k)^{m_k}$$

であったから、両者を比較すると

$$m_1=n_1, m_2=n_2, m_k=n_k$$

でなくてはならない。よって R_j の次元 n_j は λ_j の重複度 m_j に等しい。(証明終)

2・3 行列のジョルダン標準形

前節の結果を要約しておこう。行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ とし、 A の固有多項式を

$$f_A(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\dots(t-\lambda_k)^{m_k}$$

最小多項式を

$$\varphi_A(t) = (t-\lambda_1)^{l_1}(t-\lambda_2)^{l_2}\dots(t-\lambda_k)^{l_k}$$

とすれば、 $m_1 \geq l_1, m_2 \geq l_2, \dots, m_k \geq l_k$ である。

$$(A-\lambda_j I)^{l_j} x = 0$$

をみたす x の全体を R とすれば、 n 次元空間 R^n は

$$R^n = R_1 + R_2 + \dots + R_k$$

と直和分解される。各 R_j はベクトル空間であって、その次元は λ_j の重複度 m_j と一致する。各 R_j のなかから m_j 個の基底ベクトルをえらび、それらのすべてを並べてつくられる R^n の基底行列を P とすれば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & B_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & B_k \end{pmatrix}$$

となる。ここで各 B_j は m_j 次の正方行列で、対応する最小多項式中の因数 $(t-\lambda_j)^{l_j}$ は B_j の零化多項式になる。

以上が前節の内容の要約であるが、以下においては、各 R_j の基底ベクトルをうまくえらぶことによって、行列 B_j をきれいな形——ジョルダンの標準形——にすることを考えるのである。各 R_j に対して適用される以下の考察では、記号の簡単化のために、下つき添字 j

はすべて省略してかくことにする。

λ は A の重複度 m の固有値で、最小多項式の中での λ の重複度が l 、 $(A-\lambda I)^l x = 0$ をみたす x の全体を R とする。 R は m 次元ベクトル空間で、対応する $P^{-1}AP$ 中の m 次正方行列が B である。

$x \in R$ が、条件

$$(A-\lambda I)^r x = 0, (A-\lambda I)^{r-1} x \neq 0$$

をみたすとき、 x の次数は r である、ということにする。 R の定義から、当然、 $r \leq l$ である。

R に含まれるベクトルの系列 x_1, x_2, \dots, x_r が

$$x_1 \neq 0, (A-\lambda I)x_1 = 0, (A-\lambda I)x_2 = x_1, \dots, (A-\lambda I)x_r = x_{r-1}$$

をみたすとき、あるいは、同じことであるが

$$x_1 \neq 0, Ax_1 = \lambda x_1, Ax_2 = \lambda x_2 + x_1, \dots, Ax_r = \lambda x_r + x_{r-1}$$

をみたすとき、 x_1, x_2, \dots, x_r を、固有値 λ に対応する A の特性系列といい、 r をこの特性系列の長さという。

$r = 0, 1, 2, \dots, l$ に対して、 R のベクトル x で

$$(A-\lambda I)^r x = 0$$

をみたすものの全体を K_r とあらわす。容易にわかるように、各 K_r はベクトル空間であって

$$R = K_l \supset K_{l-1} \supset \dots \supset K_1 \supset K_0 = 0$$

となっている。そこで、まず、 $K_l = R$ には含まれるが K_{l-1} には含まれないベクトル $u_1^{(l)}$ をとる。あきらかに、 $u_1^{(l)}$ の次数は l である。次に、 $u_1^{(l)}$ と K_{l-1} から生成されるベクトル空間を考え、このベクトル空間に含まれない K_{l-1} のベクトルがあれば、その1つを $u_2^{(l)}$ とする。 $u_2^{(l)}$ の次数も l である。さらに、 $u_1^{(l)}, u_2^{(l)}, K_{l-1}$ で生成されるベクトル空間を考え、それに含まれない K_{l-1} のベクトルがあれば、その1つを $u_3^{(l)}$ とする。以下同様に進むと、次数 l のベクトルの系列

$$u_1^{(l)}, u_2^{(l)}, \dots, u_{n_l}^{(l)}$$

で、これらと K_{l-1} とから生成されるベクトル

空間が K_l と一致するようなものがえられる。そのつくり方から、 $u_1^{(l)}, u_2^{(l)}, \dots, u_{n_l}^{(l)}$ が 1 次独立であることはすぐわかるが、さらに

$$\alpha_1 u_1^{(l)} + \alpha_2 u_2^{(l)} + \dots + \alpha_{n_l} u_{n_l}^{(l)} \in K_{l-1} \quad (2 \cdot 15)$$

となるのは、 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n_l} = 0$ の場合に限ることが示される。なぜなら、(2・15) が成り立つとき

$$\alpha_1 u_1^{(l)} + \alpha_2 u_2^{(l)} + \alpha_{n_l} u_{n_l}^{(l)} = v$$

とおくと $v \in K_{l-1}$ であるが、ここで $\alpha_{n_l} \neq 0$ とすると

$$u_{n_l}^{(l)} = \frac{1}{\alpha_{n_l}} (v - \alpha_1 u_1^{(l)} - \dots - \alpha_{n_l-1} u_{n_l-1}^{(l)})$$

の右辺は $u_1^{(l)}, \dots, u_{n_l-1}^{(l)}$ と K_{l-1} で生成されるベクトル空間に含まれるから、左辺の $u_{n_l}^{(l)}$ もその空間に含まれることになって、 $u_{n_l}^{(l)}$ のえらび方に矛盾する。よって $\alpha_{n_l} = 0$ でなくてはならない。同じようにして、次々に $\alpha_{n_l-1} = \dots = \alpha_1 = 0$ がえられるのである。

(2・15) の前提から $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n_l} = 0$ が導かれるとき、 $u_1^{(l)}, u_2^{(l)}, \dots, u_{n_l}^{(l)}$ は K_{l-1} を法として 1 次独立である、という。

同様な推論はすべての K_r , $r = 1, 2, \dots, l$ に対して成立する。すなわち、まず、 K_r に含まれ K_{r-1} に含まれないベクトル $u_1^{(r)}$ をとり、次に $u_1^{(r)}$ と K_{r-1} とで生成されるベクトル空間に含まれない K_r のベクトルがあれば、その 1 つ $u_2^{(r)}$ をとり、以下同様の手続きを続けて、 K_r に含まれるが K_{r-1} には含まれないベクトルの系列

$$u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, \dots, u_{n_r}^{(r)}$$

を、これらと K_{r-1} とで生成されるベクトル空間が K_r と一致するようになるまで選んでゆく。この $u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, \dots, u_{n_r}^{(r)}$ はいずれも次数は r であって、これらは K_{r-1} を法として 1 次独立になる。

さて、ここで、 $u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, \dots, u_{n_r}^{(r)}$ が K_{r-1} を法として 1 次独立であれば

$$u_j^{(r-1)} = (A - \lambda I) u_j^{(r)}, \quad j = 1, 2, \dots, n_r$$

で定義される $u_1^{(r-1)}, u_2^{(r-1)}, \dots, u_{n_r}^{(r-1)}$ は、 K_{r-1} に含まれ、 K_{r-2} を法として 1 次独立にな

ることを証明する。まず、 $u_j^{(r)}$ は次数が r であるから $u_j^{(r-1)}$ の次数は $r-1$ であり、したがって $u_j^{(r-1)} \in K_{r-1}$ である。次に

$$\alpha_1 u_1^{(r-1)} + \alpha_2 u_2^{(r-1)} + \dots + \alpha_{n_r} u_{n_r}^{(r-1)} \in K_{r-2}$$

とすると、 K_{r-2} および $u_j^{(r-1)}$ の定義から

$$\begin{aligned} 0 &= (A - \lambda I)^{r-2} (\alpha_1 u_1^{(r-1)} + \dots + \alpha_{n_r} u_{n_r}^{(r-1)}) \\ &= (A - \lambda I)^{r-1} (\alpha_1 u_1^{(r)} + \dots + \alpha_{n_r} u_{n_r}^{(r)}) \end{aligned}$$

となるが、これは $\alpha_1 u_1^{(r)} + \dots + \alpha_{n_r} u_{n_r}^{(r)} \in K_{r-1}$ となることを示している。そして $u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, \dots, u_{n_r}^{(r)}$ は K_{r-1} を法として 1 次独立であったから、 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n_r} = 0$ でなくてはならない。

まったく同様に、 $k < r$ に対して

$$u_j^{(r-k)} = (A - \lambda I)^k u_j^{(r)}, \quad j = 1, 2, \dots, n_r$$

で定義される $u_1^{(r-k)}, u_2^{(r-k)}, \dots, u_{n_r}^{(r-k)}$ は、 K_{r-k} に含まれ、かつ、 K_{r-k-1} を法として 1 次独立であることが証明できる。

既に述べた、 K_{l-1} を法として 1 次独立な K_l のベクトル

$$u_1^{(l)}, u_2^{(l)}, \dots, u_{n_l}^{(l)}$$

からスタートして、 $u_1^{(l-k)}, u_2^{(l-k)}, \dots, u_{n_l}^{(l-k)}$ を

$$u_j^{(l-1)} = (A - \lambda I) u_j^{(l)}, \quad j = 1, 2, \dots, n_l$$

で定義する。これらは K_{l-1} に含まれ、 K_{l-2} を法として 1 次独立である。次にこれらのベクトルと K_{l-2} で生成されるベクトル部分空間を考え、それに含まれない K_{l-1} のベクトルがあればその 1 つを $u_{n_l+1}^{(l-1)}$ とする。これをさらにつけ加えて拡大したベクトル部分空間を考え、それにも含まれない K_{l-1} のベクトルがあれば、その 1 つを $u_{n_l+2}^{(l-1)}$ とし、これをさらにつけ加えて部分空間を拡大する。この操作を続けて次々に部分空間を拡大してゆき順次に

$$u_{n_l+1}^{(l-1)}, u_{n_l+2}^{(l-1)}, \dots, u_{n_l-1}^{(l-1)}$$

まで求めたとき、 $u_1^{(l-1)}$ から $u_{n_l-1}^{(l-1)}$ までと K_{l-2} で生成されるベクトル空間が K_{l-1} と一致するものとしよう。このとき、 K_{l-2} につけ加えられる K_{l-1} のベクトルの全体

$$u_1^{(l-1)}, u_2^{(l-1)}, \dots, u_{n_l}^{(l-1)}, u_{n_l+1}^{(l-1)}, \dots, u_{n_l-1}^{(l-1)}$$

は K_{l-2} を法として 1 次独立になる。

次に、いま得た $u_j^{(l-1)}$, $j = 1, 2, \dots, n_{l-1}$ から

$u_j^{(l-2)} = (A - \lambda I)u_j^{(l-1)}$, $j = 1, 2, \dots, n_{l-1}$ によって $u_1^{(l-2)}, u_2^{(l-2)}, \dots, u_{n_{l-1}}^{(l-2)}$ を定義する。これらは K_{l-2} に含まれ、 K_{l-3} を法として 1 次独立になるが、これらと K_{l-3} とで生成されるベクトル部分空間が K_{l-2} と一致しないときは、前述と同様の手続きにより、順次に $u_{n_{l-1}+1}^{(l-2)}, \dots$ を求め、それらを次々に K_{l-3} につけ加えることによって拡大されてゆく部分空間が K_{l-2} と一致するまで、その手続きを続ける。こうして

$$u_1^{(l-2)}, u_2^{(l-2)}, \dots, u_{n_{l-2}}^{(l-2)}, u_{n_{l-1}+1}^{(l-2)}, \dots, u_{n_{l-2}}^{(l-2)}$$

がえられる。これらは K_{l-3} を法として 1 次独立な K_{l-2} のベクトルの系列である。以後同様の手続きを続け、こうして得られたすべての $u_j^{(r)}$ をならべると、次のようになろう。

$$\begin{array}{ccccccc} u_1^{(l)}, u_2^{(l)}, & \dots, & u_{n_l}^{(l)} \\ u_1^{(l-1)}, u_2^{(l-1)}, & \dots, & u_{n_l}^{(l-1)}, u_{n_{l+1}}^{(l-1)}, u_{n_{l-1}}^{(l-1)} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \quad (2 \cdot 16)$$

$$u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \dots, u_{n_l}^{(2)}, u_{n_{l+1}}^{(2)}, \dots, u_{n_{l-1}}^{(2)}, \dots, u_{n_2}^{(2)}$$

$$u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_{n_l}^{(1)}, u_{n_{l+1}}^{(1)}, \dots, u_{n_{l-1}}^{(1)}, \dots, u_{n_2}^{(1)}, u_{n_{2+1}}^{(1)}, \dots, u_{n_1}^{(1)}$$

これらのベクトルのうち、最下行に並んでいる $u_1^{(l)}, u_2^{(l)}, \dots, u_{n_l}^{(l)}$ は K_1 の基底となり、これに下から 2 行目の $u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \dots, u_{n_2}^{(2)}$ をつけ加えた $n_1 + n_2$ 個のベクトルが K_2 の基底になり、こうして、一般に、 $u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, \dots, u_{n_r}^{(r)}$ までをつけ加えた $n_1 + n_2 + \dots + n_r$ 個のベクトルが K_r の基底を構成する。それを証明しよう。

証明は r に関する数学的帰納法によっておこなう。 $r = 1$ のときは、 $u_1^{(l)}, u_2^{(l)}, \dots, u_{n_l}^{(l)}$ のえらび方は、まず、 K_1 には含まれるが $K_0 = 0$ ではない $u_1^{(l)}$ をとり、次いで $u_1^{(l)}$ で生成される部分空間に含まれない $u_2^{(l)} \in K_1$ を

とり、さらに $u_1^{(l)}, u_2^{(l)}$ で生成される部分空間に含まれない $u_3^{(l)} \in K_1$ をとり、以下同様に続けて、究極的に $u^{(l)}, u_2^{(l)}, \dots, u_{n_l}^{(l)}$ のつくる部分空間が K_1 と一致するまでとり続けるわけだから、これらが K_1 の基底を構成するとは明らかであろう。

次に、 $u_1^{(l)}, \dots, u_{n_l}^{(l)}, \dots, u_1^{(r-1)}, \dots, u_{n_{r-1}}^{(r-1)}$ が K_{r-1} の基底であると仮定して、これに $u_1^{(r)}, \dots, u_{n_r}^{(r)}$ をつけ加えた全体が K_r の基底になることを示す。そのために、まず、これらのベクトルが 1 次独立であることを示さなくてはならない。そこで

$$\alpha_1^{(r)} u_1^{(r)} + \dots + \alpha_{n_r}^{(r)} u_{n_r}^{(r)} + \alpha_1^{(r-1)} u_1^{(r-1)} + \dots + \alpha_{n_1}^{(1)} u_{n_1}^{(1)} = 0 \quad (2 \cdot 17)$$

とおく。両辺に $(A - \lambda I)^{r-1}$ をかけると、左辺の $u_1^{(r+1)}$ からあとの部分はゼロになるから

$$(A - \lambda I)^{r-1} (\alpha_1^{(r)} u_1^{(r)} + \dots + \alpha_{n_r}^{(r)} u_{n_r}^{(r)}) = \alpha_1^{(1)} u_1^{(1)} + \alpha_2^{(2)} u_2^{(2)} + \dots + \alpha_{n_r}^{(r)} u_{n_r}^{(r)} = 0$$

がえられる。そして $u_1^{(l)}, u_2^{(l)}, \dots, u_{n_r}^{(l)}$ は K_1 の基底の一部分であるから 1 次独立であり、したがって $\alpha_1^{(r)} = \alpha_2^{(r)} = \dots = \alpha_{n_r}^{(r)} = 0$ でなくてはならない。それゆえ (16) 式は

$$\alpha_1^{(r-1)} u_1^{(r-1)} + \dots + \alpha_{n_1}^{(1)} u_{n_1}^{(1)} = 0$$

となるが、帰納法の仮定により、 $u_1^{(r-1)}$ から $u_{n_1}^{(1)}$ までは K_{r-1} の基底であるから

$$\alpha_1^{(r-1)} = \alpha_2^{(r-1)} = \dots = \alpha_{n_1}^{(1)} = 0$$

である。よって 1 次独立性が示された。

次に、 K_r の任意のベクトルは $u_1^{(1)}$ から $u_{n_r}^{(r)}$ までの 1 次結合となることを示さなくてはならない。そこで $v \in K_r$ を任意にえらぶ。 K_r は K_{r-1} と $u_1^{(r)}, \dots, u_{n_r}^{(r)}$ で生成されるベクトル空間であったから、適当な $w \in K_{r-1}$ により

$$v = w + \alpha_1^{(r)} u_1^{(r)} + \dots + \alpha_{n_r}^{(r)} u_{n_r}^{(r)}$$

とかくことができる。 $w \in K_{r-1}$ であるから、帰納法の仮定により $w \in u_1^{(1)}, \dots, u_{n_{r-1}}^{(r-1)}$ の 1 次結合になる。よって v は $u_1^{(1)}$ から $u_{n_r}^{(r)}$ までの 1 次結合になる。

以上により、 $u_1^{(1)}$ から $u_{n_r}^{(r)}$ までが K_r の基底となることが示された。 $r = l$ の場合を考

えば、(2・16)のベクトルの全体が $R=K_l$ の基底になることがわかった。これらの基底ベクトルのうち、左端の縦に並んだ l 個の $u_1, u_1^{(l-1)}, \dots, u_1^{(1)}$ は、そのつくり方から $u_1^{(l-1)} = (A - \lambda I)u_1^{(l)}, u_1^{(l-2)} = (A - \lambda I)u_1^{(l-1)}, \dots, u_1^{(1)} = (A - \lambda I)u_1^{(2)}$

という関係で結ばれている。むしろ $(A - \lambda I)u_1^{(l-1)} = 0$ であり、かつ $u_1^{(1)} \neq 0$ であるから、これらは長さ l の特性系列になっている。同様に、(2・16)の一番上の行の各 $u_1^{(l)}, u_2^{(l)}, \dots, u_{n_l}^{(l)}$ から始まる n_l 個の縦のベクトル系列は、いずれも長さ l の特性系列になっている。続いて、(2・16)の左から $n_l + 1$ 列目から始まる $n_{l-1} - n_l$ 個のベクトル系列は、いずれも長さ $l-1$ の特性系列になっている。一般に、 $r = 1, 2, \dots, l$ に対して、(2・16)の左から $n_{r+1} + 1$ 番目の列から始まる $n_r - n_{r+1}$ 個のベクトル系列は、いずれも長さ r の特性系列になっている。(2・16)のベクトルの総数は、 $n_1 + n_2 + \dots + n_l$ であるが、これらがベクトル空間 R の基底を構成するのであるから、 $n_1 + n_2 + \dots + n_l = m$ でなくてはならない。

さて、ここで、(2・16)の基底を逆の順序に並べかえる。すなわち、(2・16)の右下隅から順次に左へ、長さ 1 の特性系列を構成する $n_1 - n_2$ 個の $u_{n_1}^{(1)}, \dots, u_{n_2+1}^{(1)}$ を $p_1, p_2, \dots, p_{n_1-n_2}$ とかきかえる。次いで $n_2 - n_3$ 個の長さ 2 の特性系列に移り、それらを各列ごとに下から上へととってゆき、上まで行ったらその左に移って、また下から上へととってゆく。こうして、長さ 2 の特性系列が終わったら、長さ 3 の特性系列に移り、やはり、各特性系列ごとに下から上へととってゆく。こうして、すべての $u_j^{(r)}$ を並べかえたものを

$$p_1, p_2, \dots, p_m \quad (2 \cdot 18)$$

とする。これらのうちの

$$p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_{i+r}$$

が長さ r の特性系列になっているとしよう。これに対しては、特性系列であることから

$$Ap_{i+1} = \lambda p_{i+1}$$

$$Ap_{i+2} = p_{i+1} + \lambda p_{i+2}$$

$$Ap_{i+3} = p_{i+2} + \lambda p_{i+3}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$Ap_{i+r} = p_{i+r-1} + \lambda p_{i+r}$$

が成り立つから、これを行列の形でかくと

$$A(p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_{i+r}) = (p_{i+1}, p_{i+2}, \dots,$$

$$p_{i+r}) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & 0 \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

となり、これを (2・9) と比較すると、 B の中の対応する部分が

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \quad (2 \cdot 19)$$

となっていることがわかる。この形をジョルダン区画とよぶ。基底(2・18)は、その最初の $n_1 - n_2$ 個は 1 つ 1 つが長さ 1 の特性系列であり、次の $2(n_2 - n_3)$ 個は長さ 2 の特性系列が $n_2 - n_3$ 個並んだものであり、同様にして、最後の $l(n_{l-1} - n_l)$ 個は長さ l の特性系列が $n_{l-1} - n_l$ 個並んだものである。そして、各特性系列に対応して(2・19)の形のジョルダン区画が生ずるから、結局、 R の基底として(2・18)を採用すれば、行列 B は次の形をとることになる。

$$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & & & & \\ & \boxed{\lambda} & & & \\ & & \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}} & & \\ & & & \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}} & \\ & & & & \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & \\ 0 & & \lambda \end{smallmatrix}} \end{pmatrix} \quad (2 \cdot 20)$$

以上の結果を各 B_j に適用することにより、次の定理がえられる。

定理 2・9 (Jordan の定理) 行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ とし、固有多項式

におけるそれらの重複度をそれぞれ m_1, m_2, \dots, m_k , 最小多項式におけるそれらの重複度を l_1, l_2, \dots, l_k とする。各 λ_j に対して

$$(A - \lambda_j I)^{l_j} x = 0$$

をみたす x の集合を R_j とすれば, R_j は n 次元ベクトル空間 R^n の m_j 次元の部分空間であって, R^n は

$$R^n = R_1 + R_2 + \dots + R_k$$

と直和分解される。各 R_j の基底として, λ_j に対応する A の特性系列をとることができ, それらを特性系列の長さの短い順に並べたものを

$$p_1^{(j)}, p_2^{(j)}, \dots, p_{m_j}^{(j)}$$

とする。 $j = 1, 2, \dots, k$ に対するこれらのベクトルをすべて並べた

$$p_1^{(1)}, \dots, p_{m_1}^{(1)}, p_1^{(2)}, \dots, p_{m_2}^{(2)}, \dots, \\ \dots, p_1^{(k)}, \dots, p_{m_k}^{(k)}$$

は R^n の基底を構成する。そして, これらのつくる行列を P とすれば

$$J(A) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & B_2 & \\ 0 & & B_k \end{pmatrix}$$

となり, ここで各 B_j は (2×20) の形をとる。

この形の $J(A)$ を, A のジョルダンの標準形というのである。

A をジョルダン標準形にするには基底行列 P を求めなくてはならないが, P の各列ベクトルは各 λ_j に対応する特性系列になっている。したがって, 特性系列を求めることができれば, ジョルダン標準形がえられる。

固有値の重複度がすべて 1 のときは, すなわち, n 個の固有値がすべて相異なるときは, ジョルダン標準形は, 固有値を対角要素にもつ対角行列になる。このときの P は, 各固有値 λ_j に対応する固有ベクトル p_j から成る行列 $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ である。

[例]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のジョルダン標準形を求めてみる。 A の固有方程式は $(t-1)^3 = 0$ となるから, 固有値 1 は 3 重根である。これに対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ である。}$$

一方, 最小多項式は $(t-1)^3$ の因数であるから, $(t-1)^r (r \leq 3)$ の形をとるが, ここで t を A とおくと $r=1$ のときは

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r=2$ のときは

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって最小多項式は $(t-1)^2$ であり, $l=2$ であって, 特性系列の長さは最大限 2 である。

$(A - \lambda I)^l x = 0$ となる x の全体は, いまの場合, $(A - I)^2 = 0$ だから, 3 次元ベクトル空間全体 R^3 になる。すなわち, $K_2 = R^3$ である。 K_1 は $(A - I)x = 0$ となる x の全体だから, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される部分空間になる。

K_2 に含まれ, K_1 に含まれないベクトル $u_1^{(2)}$ として, 明らかに $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる。

これは次数 2 のベクトルであって, これから長さ 2 の特性系列がつけられる。それは,

$$u_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ と } u_1^{(1)} = (A - \lambda I)u_1^{(2)} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とから成る。 $u_1^{(1)} \in K_1$ であるが, $u_1^{(1)}$ と $K_0 = 0$ で生成されるベクトル空間は K_1 と一致しないから, K_1 に含まれ, かつ, $u_1^{(1)}$ と $K_0 = 0$ で生成される空間に含まれないベクトルとして

$$u_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ をとれば, } u_1^{(1)} \text{ と } u_2^{(1)} \text{ は } K_1$$

を生成する。そして、長さ 2 の特性系列 $u_1^{(2)}$, $u_1^{(1)}$ と、いま求めた $u_2^{(1)}$ が, $K_2=R^3$ の基底を構成する。そこで

$$p_1=u_2^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2=u_1^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$p_3=u_1^{(2)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$P=(p_1, p_2, p_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、これを用いて

$$J(A)=P^{-1}AP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

A が実数行列で、 λ が m 重の複素数の固有値であれば、共役複素数 $\bar{\lambda}$ も m 重の固有値で、 λ に対応する長さ r の特性系列 p_1, p_2, \dots, p_r に対して、その共役複素ベクトル $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_r$ は、 $\bar{\lambda}$ に対応する長さ r の特性系列となっている。

3 定数係数線型連立微分方程式の解

ここでは、 x の未知関数 y_1, y_2, \dots, y_n に関する連立微分方程式

$$y_1''=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\dots+a_{1n}y_n$$

$$y_2'=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\dots+a_{2n}y_n \quad (3.1)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y_n'=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\dots+a_{nn}y_n$$

の解の一般形を求める問題を考える。ここで y_i' は関数 y_i の x についての導関数をあらわす。 a_{ij} は所与の定数である。未知関数のベクトルを y , 係数行列を A とかく。

$$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad y'=\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

そうすると、微分方程式 (3.1) は簡単に

$$y'=Ay \quad (3.2)$$

とかくことができる。

微分方程式 (3.2) の解に関する基本的な性質をはじめに列挙しておこう。まず、 y が (3.2) の解であれば、任意の定数 α に対して αy もまた (3.2) の解となるし、 y_1, y_2 が共に (3.2) の解であれば、 y_1+y_2 もまた (3.2) の解となることは、すぐ確かめられる。一般に、 y_1, y_2, \dots, y_k がいずれも (3.2) の解であれば、それらの定数係数の 1 次結合はすべて (3.2) の解となる。

定理 3.1 y_1, y_2, \dots, y_n を微分方程式 (3.2) の n 個の解ベクトルとすれば、それらを並べて得られる行列の行列式

$$D(x)=|y_1, y_2, \dots, y_n|$$

は恒等的にゼロになるか、あるいは決してゼロにならないかのいずれかである。

$$\text{証明, } y_1=\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \quad y_2=\begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots,$$

$$y_n=\begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$$

とおけば

$$D(x)=\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

となる。そこで $D(x)$ のみたすべき微分方程式を求めてみよう。そのために $D(x)$ の導関数 $D'(x)$ を計算する。

$$D'(x)=\begin{vmatrix} y_{11}' & y_{12}' & \dots & y_{1n}' \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y'_{21} & y'_{22} & \cdots & y'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y'_{n1} & y'_{n2} & \cdots & y'_{nn} \end{vmatrix}$$

であるから、この式の右辺の各行列式を変形してみる。各 y_j が(3・2)すなわち(3・1)の解であることから、 y_j の第 i 成分 y_{ij} の導関数 y'_{ij} は(3・1)により

$$y'_{ij} = a_{i1}y_{1j} + a_{i2}y_{2j} + \cdots + a_{in}y_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}y_{kj}$$

をみたすはずである。したがって

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y'_{i1} & y'_{i2} & \cdots & y'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{ik}y_{k1} \sum_{k=1}^n a_{ik}y_{k2} \cdots \sum_{k=1}^n a_{ik}y_{kn}$$

$$\sum_{n=1}^n a_{ik} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{k1} & y_{k2} & \cdots & y_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = a_{ii} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots \\ y_{12} & y_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{i1} & y_{i2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \cdots \\ y_{in} \\ \cdots \\ y_{nn} \end{vmatrix} = a_{ii}D(x)$$

となる。よって

$$D'(x) = a_{11}D(x) + a_{22}D(x) + \cdots + a_{nn}D(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}D(x)$$

となる。 $\sum_{i=1}^n a_{ii} = \alpha$ とおけば、 $D'(x) = \alpha D(x)$

すなわち

$$D'(x) - \alpha D(x) = 0$$

となる。両辺に $e^{-\alpha x}$ をかけると、左辺は $D'(x)$

$e^{-\alpha x} - \alpha e^{-\alpha x} D(x) = [D(x)e^{-\alpha x}]'$ となるから

$$[D(x)e^{-\alpha x}]' = 0 \quad \therefore D(x)e^{-\alpha x} = C \text{ (定数)}$$

すなわち

$$D(x) = Ce^{\alpha x}$$

となる。よって、 $C \neq 0$ なら、 $D(x)$ は x の値の如何にかかわらず、決してゼロにはならないし、 $C = 0$ ならば、 x は何であっても、 $D(x)$ は恒等的にゼロになる。(証明終)

$D(x) = |y_1 y_2 \cdots y_n|$ が決してゼロにならないとき、(3・2)の解の組 y_1, y_2, \cdots, y_n を、1組の基本解という。

定理 3・2 y_1, y_2, \cdots, y_n を(3・2)の1組の基本解とすれば、(3・2)の任意の解 y は、 y_1, y_2, \cdots, y_n の定数係数の1次結合としてあらわされる。

証明 仮定により任意の x に対して $D(x) = |y_1 y_2 \cdots y_n| \neq 0$ であるから、各 x に対して、ベクトル y_1, y_2, \cdots, y_n は1次独立であり、これらはいずれも n 次元ベクトルであるから、 n 次元空間の基底を構成する。したがって、 n 次元ベクトル y は、 y_1, y_2, \cdots, y_n の1次結合になる。各 x に対して y は y_1, y_2, \cdots, y_n の1次結合になるが、結合の係数は一般に x に依存するかもしれない。そのことを考慮に入れて

$$y = \alpha_1(x)y_1 + \alpha_2(x)y_2 + \cdots + \alpha_n(x)y_n$$

とかくことができる。この式の両辺を微分すると

$$y' = \alpha_1(x)y'_1 + \alpha_2(x)y'_2 + \cdots + \alpha_n(x)y'_n + \alpha'_1(x)y_1 + \alpha'_2(x)y_2 + \cdots + \alpha'_n(x)y_n$$

となるが、右辺の前半は、 y_1, y_2, \cdots, y_n が(3・2)の解であるから

$$\begin{aligned} & \alpha_1(x)y'_1 + \alpha_2(x)y'_2 + \cdots + \alpha_n(x)y'_n \\ &= \alpha_1(x)Ay_1 + \alpha_2(x)Ay_2 + \cdots + \alpha_n(x)Ay_n \\ &= A(\alpha_1(x)y_1 + \alpha_2(x)y_2 + \cdots + \alpha_n(x)y_n) = Ay \end{aligned}$$

となる。一方 y も(3・2)の解であるから、左辺も Ay である。よって、すべての x に対して

$$\alpha'_1(x)y_1 + \alpha'_2(x)y_2 + \cdots + \alpha'_n(x)y_n = 0$$

である。 y_1, y_2, \cdots, y_n はすべての x に対して1次独立であるから、したがって、 $\alpha'_i(x)$

$=\alpha_2'(x)=\cdots=\alpha_n'(x)=0$ でなくてはならない。よって $\alpha_1(x)=C_1, \alpha_2(x)=C_2, \cdots, \alpha_n(x)=C_n$, 各 C_i は定数, である。すなわち

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$$

とかくことができる。(証明終)

定理 3・2 により, 微分方程式 (3・2) のすべての解を求めるためには, 1 組の基本解を求めればよいことがわかった。そこで, (3・2) の基本解を求めることを考えてみよう。

そのために, いま

$$y=pe^{tx}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} e^{tx}$$

において, この y が (3・2) の解となるように t と p の値を決めることを考える。この y を (3・2) に代入すると, $y'=(pe^{tx})'=tpe^{tx}$ であるから, $y'=Ay$ は $tpe^{tx}=Ape^{tx}$ となるが, 両辺を e^{tx} で割ると

$$tp=Ap$$

という関係式がえられる。この関係は, t が A の固有値であり, p が対応する固有ベクトルであることを示している。すなわち, 行列 A の固有値 λ と, 対応する固有ベクトル p に対して $y=pe^{\lambda x}$ を定義すれば, この y は (3・2) の解を与えるのである。

A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とし, 対応する固有ベクトルを p_1, p_2, \cdots, p_n とする。ここで場合をわけて考えよう。

(a) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ がすべて相異なる場合
 第 2 節の最初に述べた定理 2・1 により, この場合は, 固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ に対応する固有ベクトル p_1, p_2, \cdots, p_n は 1 次独立である。そして, n 個の解ベクトルの組

$$y_1=p_1e^{\lambda_1x}, y_2=p_2e^{\lambda_2x}, y_n=p_ne^{\lambda_nx}$$

は 1 組の基本解になる。なぜなら, 行列式

$$\begin{aligned} D(x) &= |y_1y_2\cdots y_n| \\ &= |p_1p_2\cdots p_n| e^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)x} \end{aligned}$$

は, p_1, p_2, \cdots, p_n の 1 次独立性から, 決してゼロにはならないからである。したがって, この場合, (3・2) の解の一般形は, 定理 3・2

により

$$y=C_1p_1e^{\lambda_1x}+C_2p_2e^{\lambda_2x}+\cdots+C_np_ne^{\lambda_nx}$$

で与えられる。

(b) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ のなかに重根がある場合。この場合を扱うのに, 第 2 節で述べたジョルダンの標準形が必要になる。行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ とし, それらの重複度を m_1, m_2, \cdots, m_k とする。このとき, 第 2 節の結果により, 適当に正則行列 P をえらんで, A をジョルダンの標準形

$$J(A)=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & B_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & B_k \end{pmatrix}$$

にすることができる。ここで B_j は固有値 λ_j に対応する m_j 次の正方行列で, つぎの形をもつ。

$$B_j=\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_j} & & & 0 \\ & \boxed{\lambda_j} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_j & 1 \\ 0 & \lambda_j \end{matrix}} & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_j & 1 & 0 \\ \lambda_j & 1 & \\ 0 & & \lambda_j \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

B_j の対角線上に並んでいる各ジョルダン区画は, 対角線上に λ_j が並び, その右隣りに斜めに 1 が並び, その他の要素はすべてゼロである。

行列 A の m 重の固有値 λ に対応する上記の m 次の行列 B の中の 1 つのジョルダン区画を C とし, その大きさを r とする。

$$C=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ 0 & & & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$J(A)=P^{-1}AP$ の第 i 行から第 $i+r$ 行まで, 第 i 列から第 $i+r$ 列までの要素から成る r 次の小行列が上記の C であるとし, 行列 P の第 i 列から第 $i+r$ 列までの列ベクトルを $p_i, p_{i+1}, \cdots, p_{i+r}$ とすれば

$$AP=PJ(A)$$

の両辺の第 i 列から第 $i+r$ 列までを比較することによって

$Ap_i = \lambda p_i, Ap_{i+1} = \lambda p_{i+1} + p_i, \dots, Ap_{i+r} = \lambda p_{i+r} + p_{i+r-1}$ が成立していることがわかる。これは第2節で述べた P のつくり方から、当然のことであり、 $p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+r}$ は固有値 λ に対応する長さ r の特性系列になっている。これに対して、次の定理が成立する。

定理 3・3 A の固有値 λ に対応する長さ r の特性系列の1つを p_1, p_2, p_r とし、これらを用いて関数ベクトル $u_1(x), u_2(x), u_r(x)$ を

$$u_1(x) = p_1$$

$$u_2(x) = p_1 x + p_2$$

$$u_3(x) = \frac{1}{2!} p_1 x^2 + p_2 x + p_3$$

.....

$$u_r(x) = \frac{1}{(r-1)!} p_1 x^{r-1} + \frac{1}{(r-2)!}$$

$$p_2 x^{r-2} + \dots + p_{r-1} x + p_r$$

で定義すれば、 r 個の関数ベクトル

$$y_j = u_j(x) e^{\lambda x}, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

はいずれも微分方程式 (3・2) の解になっている。

(証明) まず、 $u_j(x)$ の形から

$$u_j'(x) = u_{j-1}(x)$$

となることはすぐわかる。また、 p_1, p_2, \dots, p_r が λ に対応する長さ r の特性系列であるから

$$Ap_1 = \lambda p_1$$

$$Ap_2 = \lambda p_2 + p_1$$

.....

$$Ap_r = \lambda p_r + p_{r-1}$$

という関係が成立している。これから

$$\begin{aligned} Au_j(x) &= \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} Ap_1 + \frac{x^{j-2}}{(j-2)!} \\ &\quad Ap_2 + \dots + x Ap_{j-1} + Ap_j \\ &= \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} \lambda p_1 + \frac{x^{j-2}}{(j-2)!} \\ &\quad (\lambda p_2 + p_1) + \dots + x(\lambda p_{j-1} + p_{j-2}) \\ &\quad + \lambda p_j + p_{j-1} \\ &= \lambda \left(\frac{x^{j-1}}{(j-1)!} p_1 + \dots + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left. x p_{j-1} + p_j \right) + \left(\frac{x^{j-2}}{(j-2)!} p_1 \right. \\ &\quad \left. + \dots + x p_{j-2} + p_{j-1} \right) \\ &= \lambda u_j(x) + u_{j-1}(x) \end{aligned}$$

という関係がえられる。これらを使うと、 $y_j = u_j(x) e^{\lambda x}$ が (3・2) の解であることはすぐわかる。実際

$$\begin{aligned} y_j' &= u_j'(x) e^{\lambda x} + \lambda u_j(x) e^{\lambda x} = u_{j-1}(x) e^{\lambda x} + \\ &\quad \lambda u_j(x) e^{\lambda x} = (\lambda u_j(x) + u_{j-1}(x)) e^{\lambda x} = \\ &\quad A u_j(x) e^{\lambda x} = A y_j \end{aligned}$$

となるからである。(証明終)

行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ とし、それらの重複度を m_1, m_2, \dots, m_k とすれば、ジョルダン標準形 $J(A) = P^{-1} A' P$ における固有値 λ_j に対応する各ジョルダン区画に対して、その区画の大きさが r のとき、 P の対応する r 個の列ベクトルが長さ r の特性系列になり、上記定理 (3・3) により、それらの列ベクトルを用いて、 r 個の解ベクトル y をつくることができる。 λ_j に対応するすべての特性系列の長さの合計は λ_j の重複度 m_j に等しいから、定理 3・3 の方法により、 λ_j に対応する m_j 個の解ベクトルをつくることができる。各 λ_j に対してえられる m_j 個の解ベクトルは、全体でその個数は $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ 個になるが、これら n 個の解ベクトルは微分方程式 (3・2) の1組の基本解を構成する。なぜなら、これら n 個の解ベクトルを順次 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ とすれば、各 $y_j(x)$ の形から明らかに $y_j(0) = p_j$ であり、 P の正則性から $D(0) = |y_1(0), y_2(0), \dots, y_n(0)| = |p_1 p_2 \dots p_n| = |P| \neq 0$ であって、したがって定理 3・1 により、すべての x に対して $D(x) \neq 0$ となるからである。そして、定理 3・2 により、一般解 y は、 C_1, C_2, \dots, C_n を任意定数として

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

の形で与えられるのである。以上を定理としてまとめておく。

定理 3・4 微分方程式 (3・2) の係数行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ とし、それらの重複度を m_1, m_2, \dots, m_k とする。 A をジョルダン標準形 $J(A) = P^{-1}AP$ に変換する正則行列 P の各列ベクトルを p_1, p_2, \dots, p_n とする。これらは順次 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ に対応する特性系列を形成するが、そのうちの最初の m_1 個が λ_1 に対応する特性系列であり、次の m_2 個が λ_2 に対応する特性系列であり、以下同様にして、最後の m_k 個が λ_k に対応する特性系列になっているものとする。 λ_j に対応する m_j 個の特性系列は、さらに、長さがそれぞれ $1, 2, \dots, l_j$ (ここで l_j は最小多項式中の λ_j の重複度である) であるものをいくつかずつ含むが、それらのうちで長さが r であるものからは、定理 3・3 の方法により、 r 個の解ベクトルをつくることができる。こうして、まず λ_1 の各特性系列ごとに、全体で m_1 個の解ベクトルがえられるから、それらを順次

$$y_1, y_2, y_{m_1}$$

とする。次いで λ_2 に対して同様にして m_2 個の解ベクトル

$$y_{m_1+1}, y_{m_1+2}, \dots, y_{m_1+m_2}$$

をつくり、同様に続けて、すべての $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ に対して求めた解ベクトルの全体を

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

とすれば、これらは微分方程式 (3・2) の 1 組の基本解を構成し、一般解は、これらの定数係数の 1 次結合として

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

で与えられる。

この定理にもとづいて、例題をやってみよう。

$$[\text{例 1}] \begin{cases} y'_1 = y_1 \\ y'_2 = 2y_1 + y_2 \\ y'_3 = 3y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}$$

行列形でかくと

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は、第 2 節の例

として考察したものである。そこで示したように、 A の固有値は 1 で、その重複度は 3 であり、行列

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いて、 A をジョルダン標準形にすることができる。

$$J(A) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

行列 P の第 1 列 p_1 は長さ 1 の特性系列であり、第 2 列 p_2 と第 3 列 p_3 は長さ 2 の特性系列であるから

$$y_1 = p_1 e^x, \quad y_2 = p_2 e^x, \quad y_3 = (p_2 x + p_3) e^x$$

とおくと、これらは 1 組の基本解を与える。

よって一般解 y は

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix} e^x$$

で与えられる。すなわち

$$y_1 = C_3 e^x$$

$$y_2 = (C_1 + 2C_2 + 2C_3 x) e^x$$

$$y_3 = (3C_2 + 3C_3 x) e^x$$

が求める解である。

$$[\text{例 2}] \begin{cases} y'_1 = y_1 + y_2 \\ y'_2 = -y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

右辺の係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値は 2 で 2 重根である。 $\lambda = 2$ に対して

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから最小多項式は $(t-2)^2$ であり、したがって特性系列の長さは 2 である。固有ベクトルは $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ という形をもつから $p_1 =$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ とおく、次いで } (A - \lambda I)p_2 = p_1 \text{ から } p_2 =$$

を求めると、 $p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は条件に合う。

$$P = (p_1 p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、 A のジョルダン標準形は

$$J(A) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となり、ジョルダン区画はサイズ2のものが唯一つである。 p_1, p_2 が長さ2の特性系列になるから

$$y_1 = p_1 e^{2x}, y_2 = (p_1 x + p_2) e^{2x}$$

が1組の基本解となり、一般解 y は

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} e^{2x}$$

すなわち

$$y_1 = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$$

$$y_2 = (C_1 + C_2 + C_2 x) e^{2x}$$

となる。

定理3・2の方法で一般解を求めるには、係数行列 A の各固有値に対応する特性系列をすべて求めなくてはならない。上記の〔例1〕,〔例2〕のように行列のサイズが小さいときは、それはあまりむずかしいことではないが、行列のサイズが大きくなると、一般に、かなり面倒になる。

4 定数係数連立線型差分方程式の解

前節で微分方程式に対して展開した理論は、ほんの少しの変更を加えるだけで、ほとんどそのまま、差分方程式に対して当てはめることができる。

ここでは、整数値をとる変数 x の未知関数 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ に関する連立差分方程式

$$\begin{aligned} y_1(x+1) &= a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \dots + a_{1n}y_n(x) \\ y_2(x+1) &= a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \dots + a_{2n}y_n(x) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (4 \cdot 1)$$

$$y_n(x+1) = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \dots + a_{nn}y_n(x)$$

の解の一般形を求める問題を考える。前節と同様なベクトル、行列記号を用いて、(4・1)は

$$y(x+1) = A y(x) \quad (4 \cdot 2)$$

とかくことができる。ここで、係数行列 A は

正則であると仮定する。すなわち $|A| \neq 0$ と仮定する^(註)。

(註) $|A| = 0$ のときは、 A の行ベクトルは1次従属となるから、 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ のうちのあるものは、他の $y_j(x)$ の1次結合となってしまいうから、未知関数の個数を減らすことができる。

定理3・1に対応して次の定理が成立する。

定理4・1 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ を差分方程式(4・2)の n 個の解ベクトルとすれば、それらを並べて得られる行列の行列式

$$D(x) = |y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)|$$

はすべての x に対してゼロになるか、あるいは決してゼロにならないかのいずれかである。

証明 $y_j(x), j = 1, 2, \dots, n$ はいずれも(4・2)の解であるから、 $y_j(x+1) = A y_j(x)$ である。これを用いて

$$\begin{aligned} D(x+1) &= |y_1(x+1), y_2(x+1), \dots, y_n(x+1)| \\ &= |A y_1(x), A y_2(x), \dots, A y_n(x)| \\ &= |A| |y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)| \\ &= |A| D(x) \end{aligned}$$

すなわち、 $D(x)$ は1階の線型差分方程式

$$D(x+1) - |A| D(x) = 0$$

をみたす。ここで、仮定により $|A| \neq 0$ であるから、上式の両辺を $|A|^{x+1}$ で割ると

$$\frac{D(x+1)}{|A|^{x+1}} - \frac{D(x)}{|A|^x} = 0$$

すなわち

$$\Delta \left(\frac{D(x)}{|A|^x} \right) = 0$$

である。ここで Δ は差分記号である。よって

$$\frac{D(x)}{|A|^x} = C \quad \text{すなわち}$$

$$D(x) = C |A|^x$$

となる。ここで C は定数である。この形から明らかなように、 $C \neq 0$ ならば $D(x)$ は決してゼロにはならないし、 $C = 0$ ならば、つねにゼロである。(証明終)

$D(x) = |y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)|$ が決してゼロにならないとき、解の組 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ を 1 組の基本解という。

定理 3・2 に対応して、次の定理が成立する。

定理 4・2 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ を (4・2) の 1 組の基本解とすれば、(4・2) の任意の解 $y(x)$ は、これら $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ の定数係数の 1 次結合としてあらわすことができる。

証明 仮定により、各 x に対して $D(x) = |y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)| \neq 0$ であるから、ベクトル $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ は各 x に対して 1 次独立であり、しかも、これらはいずれも n 次元ベクトルであるから、 n 次元空間の基底を構成する。したがって、任意の解である n 次元ベクトル $y(x)$ は、各 x に対して、 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ の 1 次結合になる。しかし、結合の係数は x に依存するかもしれないから、そのことを考慮して

$$y(x) = \alpha_1(x)y_1(x) + \alpha_2(x)y_2(x) + \dots + \alpha_n(x)y_n(x) \quad (4・3)$$

とかくことができる。これはすべての x について成り立つ関係式であるから、 x を $x+1$ でおきかえて

$$y(x+1) = \alpha_1(x+1)y_1(x+1) + \alpha_2(x+1)y_2(x+1) + \dots + \alpha_n(x+1)y_n(x+1)$$

がえられるが、ここで、 $y(x), y_j(x), j = 1, 2, \dots, n$ はいずれも (4・2) の解であることを考慮すると

$$\begin{aligned} Ay(x) &= \alpha_1(x+1)Ay_1(x) + \alpha_2(x+1)Ay_2(x) + \dots + \alpha_n(x+1)Ay_n(x) \\ &= A(\alpha_1(x+1)y_1(x) + \alpha_2(x+1)y_2(x) + \dots + \alpha_n(x+1)y_n(x)) \end{aligned}$$

がえられる。 A は正則だから、両辺に A の逆行列を左からかけて

$$y(x) = \alpha_1(x+1)y_1(x) + \alpha_2(x+1)y_2(x) + \dots + \alpha_n(x+1)y_n(x)$$

がえられる。これと (4・3) 式を比較すると

$$\alpha_1(x+1)y_1(x) + \alpha_2(x+1)y_2(x) + \dots + \alpha_n(x+1)y_n(x) = \alpha_1(x)y_1(x) + \alpha_2(x)y_2(x) + \dots + \alpha_n(x)y_n(x)$$

$$+ \dots + \alpha_n(x)y_n(x)$$

となる。移項して

$$(\alpha_1(x+1) - \alpha_1(x))y_1(x) + (\alpha_2(x+1) - \alpha_2(x))y_2(x) + \dots + (\alpha_n(x+1) - \alpha_n(x))y_n(x) = 0$$

そして、各 x に対して $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ が 1 次独立であるから、各 x に対して $\alpha_1(x+1) = \alpha_1(x), \alpha_2(x+1) = \alpha_2(x), \alpha_n(x+1) = \alpha_n(x)$

でなくてはならない、すなわち、 $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)$ は x に依存しない定数である。それを C_1, C_2, \dots, C_n とおけば、(4・3) は $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x)$ となる。(証明終)

定理 4・2 により、差分方程式 (4・2) のすべての解を求めるためには、その 1 組の基本解を求めればよいことがわかった。そこで (4・2) の基本解を求めることを考えてみよう。

そのために、ここで

$$y(x) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} t^x = p t^x$$

とおいて、この $y(x)$ が (4・2) の解となるように t と p を決めることを考える。この $y(x)$ を (4・2) に代入すると $p t^{x+1} = A p t^x$ となるが、両辺を t^x で割って

$$t p = A p$$

がえられる。これは、前節と同じく、 t が A の固有値であり、 p が対応する固有ベクトルであることを示している。仮定により $|A| \neq 0$ であるから、 A の固有値はゼロを含まない。 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とし、対応する固有ベクトルを p_1, p_2, \dots, p_n とすれば、 $\lambda_j \neq 0, j = 1, 2, \dots, n$ であって、 $y_1(x) = p_1 \lambda_1^x, y_2(x) = p_2 \lambda_2^x, \dots, y_n(x) = p_n \lambda_n^x$ はいずれも (4・2) の解を与えるのである。ここで場合をわけて考える。

(a) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ がすべて相異なる場合
この場合は固有ベクトル p_1, p_2, \dots, p_n は 1 次独立になるから、 n 個の解ベクトルの組

$$y_1(x)=p_1\lambda_1^x, y_2(x)=p_2\lambda_2^x, \dots, y_n(x) \\ =p_n\lambda_n^x$$

は 1 組の基本解になる。なぜなら

$$D(x)=|y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)| = \\ |p_1p_2\cdots p_n| \lambda_1^x\lambda_2^x\cdots\lambda_n^x \neq 0$$

となるからである。よって (4・2) の一般解 $y(x)$ は

$$y(x)=C_1p_1\lambda_1^x+C_2p_2\lambda_2^x+\cdots+C_np_n\lambda_n^x$$

で与えられる。

(b) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ のなかに重根のある場合

この場合を一般的に扱うためには、特性系列を使わなくてはならない。

A の固有値 λ に対応する長さ r の特性系列の 1 つを p_1, p_2, \dots, p_r とする。これらは 1 次独立なベクトルであって、関係式

$$Ap_1=\lambda p_1, Ap_2=\lambda p_2+p_1, \dots, Ap_r=\lambda p_r \\ +p_{r-1} \text{ をみたす。これに対して、定理 3・3}$$

に対応して次の定理が成立する。

定理 4・3 上記の特性系列を用いて

$$u_1(x)=p_1$$

$$u_2(x)=x^{(1)}p_1+\lambda p_2$$

$$u_3(x)=\frac{x^{(2)}}{2!}p_1+\lambda x^{(1)}p_2+\lambda^2p_3$$

.....

$$u_r(x)=\frac{x^{(r-1)}}{(r-1)!}p_1+\frac{x^{(r-2)}}{(r-2)!}\lambda p_2+\cdots$$

$$+\frac{x^{(2)}}{2!}\lambda^{r-3}p_{r-2}+x^{(1)}\lambda^{r-2}p_{r-1}+\lambda^{r-1}p_r$$

によって $u_1(x), u_2(x), \dots, u_r(x)$ を定義し、これを用いて

$$y_1(x)=u_1(x)\lambda^x, y_2(x)=u_2(x)\lambda^x, \dots,$$

$$y_r(x)=u_r(x)\lambda^x$$

とおけば、 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_r(x)$ は連立

差分方程式

$$y(x+1)=Ay(x)$$

の 1 次独立な r 個の解になる。ここで $x^{(k)}$ は階乗関数 (x の k 階乗) $x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$ をあらわす。

証明 まず $y_j(x)=u_j(x)\lambda^x$ が解になることを示す。

$$Au_j(x)=\frac{x^{(j-1)}}{(j-1)!}Ap_1+\frac{x^{(j-2)}}{(j-2)!}\lambda Ap_2 \\ +\frac{x^{(j-3)}}{(j-3)!}\lambda^2Ap_3+\cdots+x^{(1)}\lambda^{j-2}Ap_{j-1} \\ +\lambda^{j-1}Ap_j \\ =\frac{x^{(j-1)}}{(j-1)!}\lambda p_1+\frac{x^{(j-2)}}{(j-2)!}\lambda(\lambda p_2+p_1)+ \\ \frac{x^{(j-3)}}{(j-3)!}\lambda^2(\lambda p_3+p_2)+\cdots+x^{(1)}\lambda^{j-2}(\lambda p_{j-1} \\ +p_{j-2})+\lambda^{j-1}(\lambda p_j+p_{j-1}) \\ =\left(\frac{x^{(j-1)}}{(j-1)!}+\frac{x^{(j-2)}}{(j-2)!}\right)\lambda p_1+\left(\frac{x^{(j-2)}}{(j-2)!} \right. \\ \left. +\frac{x^{(j-3)}}{(j-3)!}\right)\lambda^2p_2+\cdots+(x^{(1)}+1)\lambda^{j-1}p_{j-1} \\ +\lambda^jp_j \\ =\frac{(x+1)^{(j-1)}}{(j+1)!}\lambda p_1+\frac{(x+1)^{(j-2)}}{(j+2)!}\lambda^2p_2+\cdots \\ +(x+1)^{(1)}\lambda^{j-1}p_{j-1}+\lambda^jp_j=\lambda u_j(x+1)$$

すなわち

$$Au_j(x)=\lambda u_j(x+1)$$

が成り立つ。よって

$$y_j(x+1)=u_j(x+1)\lambda^{x+1}=Au_j(x)\lambda^x \\ =Ay_j(x)$$

となるから、 $y_j(x)$ は解である。

次に $y_1(x), y_2(x), \dots, y_r(x)$ が 1 次独立であることを示そう。そのために

$$\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)+\cdots+\alpha_ry_r(x)=0$$

とおく。左辺の各 $y_j(x)$ に $u_j(x)\lambda^x$ を代入し、 p_1, p_2, \dots, p_r について整理すると、次の関係式がえられる。

$$\lambda^x\left(\alpha_1+\alpha_2x^{(1)}+\alpha_3\frac{x^{(2)}}{2!}+\cdots+\alpha_r\frac{x^{(r-1)}}{(r-1)!}\right)p_1 \\ +\lambda^{x+1}\left(\alpha_2+\alpha_3x^{(1)}+\alpha_4\frac{x^{(2)}}{2!}+\cdots+\alpha_r\frac{x^{(r-2)}}{(r-2)!}\right) \\ p_2+\cdots+\lambda^{x+r-2}(\alpha_{r-1}+\alpha_rx^{(1)})p_{r-1}+\lambda^{x+r-1} \\ \alpha_rp_r=0$$

ベクトル p_1, p_2, \dots, p_r は 1 次独立であるから、各 p_j の係数はゼロでなくてはならない。よって、 $\lambda \neq 0$ であるから

$$\alpha_1+\alpha_2x^{(1)}+\alpha_3\frac{x^{(2)}}{2!}+\cdots+\alpha_r\frac{x^{(r-1)}}{(r-1)!}=0$$

$$\alpha_2 + \alpha_3^{[1]}x + \alpha_4 \frac{x^{[2]}}{2!} + \cdots + \alpha_r \frac{x^{[r-2]}}{(r-2)!} = 0$$

.....

$$\alpha_{r-1} + \alpha_r x^{[1]} = 0$$

$$\alpha_r = 0$$

である。最後の式から $\alpha_r = 0$ であり、これを最後から 2 番目の式に入れて $\alpha_{r-1} = 0$ 、以下同様にして $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$ となって、1 次独立性が示された。(証明終)

この定理から、定理 3・4 に対応して、次の定理がえられる。

定理 4・4 差分方程式(4・2) の係数行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ とし、それらの重複度を m_1, m_2, \dots, m_k とする。各固有値の特性系列の全体を

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

とし、このうちの最初の m_1 個が λ_1 に対応する特性系列でありつぎの m_2 個が λ_2 に対応する特性系列であり、以下同様にして、最後の m_k 個が λ_k に対応する特性系列になっているものとする。 λ_j に対応する特性系列から成る m_j 個のベクトルは、さらに、長さが 1, 2, \dots, l_j である特性系列をいくつかずつ含む。そのうちの長さが r であるものに対して、前定理により、 r 個の 1 次独立な解が対応する。

λ_1 に対応する各特性系列ごとに前定理の方法で関数 $u(x)$ を定め、それを用いて $y(x)$ を定義する。それらを

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_{m_1}(x)$$

とする。次に λ_2 に対して、同様にして

$$y_{m_1+1}(x), y_{m_1+2}(x), \dots, y_{m_1+m_2}(x)$$

を定め、このようにしてすべての $\lambda_j, j=1, 2, \dots, k$ に対して定めた $y_j(x)$ の全体を

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$$

とすれば、これらは (4・2) の 1 組の基本解であって、一般解 $y(x)$ はこれらの定数係数の 1 次結合として

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

とあらわすことができる。

$$[\text{例}] \begin{cases} y_1(x+1) = 5y_1(x) - 3y_2(x) \\ y_2(x+1) = 3y_1(x) - y_2(x) \end{cases}$$

係数行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値は 2 で、2 重根である。 A の最小多項式は $(t-2)^2$ であるから A の特性系列は長さ 2 のものが 1 つあるだけである。固有ベクトルは $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の形に

なるから $p_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおくと、 p_2 は $(A - \lambda I)$

$p_2 = p_1$ から求められる。 $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とえらぶ

ことができるから、この p_1, p_2 を使って

$$u_1(x) = p_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2(x) = x p_2 + \lambda p_1 = x$$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおき、 $y_1(x) = u_1(x) 2^x$, p_2 $(x) = u_2(x) 2^x$ で $y_1(x), y_2(x)$ を定義すれば、これが 1 組の基本解になる。よって一般解 $y(x)$ は

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} 2^x + C_2 \begin{pmatrix} 3x+2 \\ 3x \end{pmatrix} 2^x$$

すなわち

$$y_1(x) = (3C_1 + 2C_2 + 3C_2 x) 2^x$$

$$y_2(x) = (3C_1 + 3C_2) 2^x$$

が求める一般解である。

5 おわりに

第 3 節、第 4 節で扱った微分方程式、差分方程式は、いずれも、いわゆる同次方程式である。非同次方程式は、同次方程式の基本解が求まれば、たとえば、定数変化法などの方法により、解を求めることができる。

社会科学で現れる微分方程式、差分方程式では、解は実数値関数であることが要求される。固有値が複素数であり、対応する固有ベクトルが複素ベクトルである場合には、互に共役な関数の組が現れるから、それらを組み合わせることにより、実関数の解をつくることができる。

ここで採り上げた形の微分方程式，差分方程式を解く際に，通常用いられる簡便法は，未知関数を消去して単一の未知関数の高階線型微分方程式をつくり，それらを解いて，その一般解の形を原方程式に代入して，任意定数間の関係を求める，というものである。この方法は，多くの本にその説明が載っているので，ここでは言及しなかった。ここで述べた方法は，ジョルダン標準形および関連する特性系列という，いささか面倒な概念に基づくものであるだけに，必ずしも実践的な方法とはいえないかもしれないが，解の理論的構

造を明確にする，という点では，大へん美しい論理構成になっていると思う。

なお，定理 3・1，3・2，4・1，4・2， は定数係数でなくても成立する性質であることを指摘しておく。

参考文献

- 1 「経済数学」岡本・蔵田・小山編，有斐閣
- 2 「常微分方程式」ポントリヤーギン，千葉訳，共立出版